

UN ANALOGUE GLOBAL DU CÔNE NILPOTENT

GÉRARD LAUMON*

0. Introduction. Soit G un groupe algébrique réductif complexe, $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie, $\mathfrak{g}^*$ le dual de l'espace vectoriel sous-jacent à $\mathfrak{g}$ et $\mathcal{N}^* \subset \mathfrak{g}^*$ le cône fermé réduit formé des éléments nilpotents de $\mathfrak{g}^*$: $\mathcal{N}^*$ est par définition la réunion des sous-espaces vectoriels $\mathfrak{b}^\perp \subset \mathfrak{g}^*$, où $\mathfrak{b}$ parcourt les sous-algèbres de Lie de Borel de $\mathfrak{g}$.

Le groupe G agit sur $\mathfrak{g}^*$ par la représentation coadjointe et laisse stable $\mathcal{N}^*$; $\mathcal{N}^*$ est réunion d'un nombre fini d'orbites pour cette action, les orbites nilpotentes de G (cf. [Sp-St]).

Dans le fibré cotangent T^*G de G , identifié à $G \times_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^*$ par translation à gauche, considérons le sous-ensemble

$$\Lambda_G = \{(g, \xi^*) | g \in Z_G(\xi^*) \text{ et } \xi^* \in \mathcal{N}^*\},$$

où on a noté $Z_G(\xi^*)$ le centralisateur de ξ^* dans G pour l'action coadjointe. Alors, on a (voir Appendices B et C pour des démonstrations):

THÉOREME (0.1). Λ_G est le support d'un fermé réduit conique et lagrangien de T^*G , noté encore Λ_G .

L'objet de cet article est de prouver un analogue "global" de (0.1). Plus précisément, soient X une courbe projective, lisse et connexe sur $\mathbb{C}$ et n un entier ≥ 1 . Notons $\text{Fib}_{X,n}$ le champ algébrique sur $\mathbb{C}$ des fibrés vectoriels $\mathcal{L}$ de rang n sur X et $T^*\text{Fib}_{X,n}$ le fibré cotangent à $\text{Fib}_{X,n}$. Les points de $T^*\text{Fib}_{X,n}$ sont les couples

$$(\mathcal{L}, \mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1),$$

où $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} k$, pour un corps k contenant $\mathbb{C}$, et où u est un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X \otimes_{\mathbb{C}} k}$ -modules.

Définition (0.2). On dira qu'un couple $(\mathcal{L}, u)$ comme ci-dessus est nilpotent si l'homomorphisme composé

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &\xrightarrow{u} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1 \xrightarrow{u \otimes 1} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_X^1)^{\otimes 2} \rightarrow \dots \\ \dots &\xrightarrow{u \otimes 1^{\otimes (n-1)}} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_X^1)^{\otimes n} \end{aligned}$$

est identiquement nul (on a noté simplement 1 l'identité de Ω_X^1).

*Unité associée au CNRS n° 752.

Received October 27, 1987. Revision received January 20, 1988.

Par analogie à Λ_G , on considère le sous-ensemble

$$\Lambda_{X,n} = \{(\mathcal{L}, u) \text{ nilpotent}\}$$

de $T^*\text{Fib}_{X,n}$. L'énoncé suivant, que j'avais conjecturé dans [La] (6.2.1), est le résultat principal de cet article.

THÉOREME (0.3). $\Lambda_{X,n}$ est le support d'un fermé réduit conique et lagrangien de $T^*\text{Fib}_{X,n}$ noté encore $\Lambda_{X,n}$.

En particulier, les fibrés vectoriels $\mathcal{L}$ de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} k$, pour k un corps contenant $\mathbb{C}$, tels qu'il n'existe pas d'homomorphismes de $\mathcal{O}_{X \otimes_{\mathbb{C}} k}$ -modules $u: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ avec $(\mathcal{L}, u)$ nilpotent autres que zéro, forment un ouvert dense de $\text{Fib}_{X,n}$ (à savoir l'ouvert au dessus duquel $\Lambda_{X,n}$ se réduit à la section nulle de $T^*\text{Fib}_{X,n}$). C'est à ma connaissance Drinfeld qui le premier a considéré cet ouvert dense de $\text{Fib}_{X,n}$ (cf. [Dr]).

Le plan de cet article est le suivant. Au numéro 1, nous définissons le cône nilpotent $\Lambda_{X,n}$ et sa stratification canonique par les types nilpotents. Au numéro 2, nous étudions d'un point de vue différentiel les champs de drapeaux (généralisés) de fibrés vectoriels sur une courbe. Le numéro 3 contient la preuve du théorème (0.3) ainsi que divers compléments (en particulier le lien entre $\Lambda_{X,n}$ et la stratification de Shatz de $\text{Fib}_{X,n}$ par le polynôme de Harder-Narasimhan). Au numéro 4, nous esquissons une autre démonstration de (0.3), valable plus généralement pour les fibrés principaux homogènes sur X sous un groupe réductif complexe arbitraire et qui utilise la présentation d'Atiyah et Bott du champ de ces fibrés.

Dans l'appendice A nous donnons les définitions et résultats de géométrie symplectique utilisés dans le cours du texte. Dans le cas particulier $G = GL_{n,\mathbb{C}}$, nous donnons une première démonstration de (0.1) dans l'appendice B. Enfin dans l'appendice C, nous montrons (0.1) en général.

Les résultats de cet article s'étendent sans grande modification au champ des faisceaux cohérents de rang générique n sur X et permettent de définir un processus d'induction parabolique pour les faisceaux automorphes (analogue géométrique de la théorie des séries d'Eisenstein pour GL_n sur un corps de fonctions). Nous y reviendrons.

J'ai bénéficié pour cet article de discussions fructueuses avec C. Moeglin, L. Moret-Bailly, et J. L. Waldspurger. La frappe du manuscrit a été admirablement réalisée par Mme. Bonnardel et Mme. Le Bronnec, je les en remercie.

1. Le champ algébrique $T^*\text{Fib}_{X,n}$ et le cône fermé $\Lambda_{X,n}$. Pour la notion de champ algébrique, on renvoie à [Ar] et à un travail en préparation de l'auteur.

On fixe dans tout cet article une courbe X connexe, projective et lisse sur $\mathbb{C}$, de genre g , et un entier $n \geq 1$. Le champ algébrique $\text{Fib}_{X,n}$ des fibrés vectoriels $\mathcal{L}$ de rang n sur X est lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $n^2(g-1)$. Ses composantes connexes $(\text{Fib}_{X,n})_{\ell \in \mathbb{Z}}$ paramètrent les fibrés vectoriels de rang n

sur X de degré ℓ fixé. On notera $\tilde{\mathcal{L}}$ le fibré vectoriel de rang n universel sur $X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X,n}$ et $pr_1: X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X,n} \rightarrow X$, $pr_2: X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X,n} \rightarrow \text{Fib}_{X,n}$ les projections canoniques.

Le complexe cotangent de $\text{Fib}_{X,n}$ (cf. [II], II, (1.2.7)) est donné par

$$L_{\text{Fib}_{X,n}/\mathbb{C}} = Rpr_{2*}\underline{\text{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)$$

et, par dualité de Grothendieck, le faisceau tangent de $\text{Fib}_{X,n}$ est donné par

$$\mathcal{T}_{\text{Fib}_{X,n}/\mathbb{C}} = R^1pr_{2*}\underline{\text{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}, \tilde{\mathcal{L}}).$$

Le fibré cotangent de $\text{Fib}_{X,n}$

$$\tau: T^*\text{Fib}_{X,n} \rightarrow \text{Fib}_{X,n}$$

est le fibré vectoriel au sens de Grothendieck $V(\mathcal{T}_{\text{Fib}_{X,n}/\mathbb{C}})$ associé au faisceau cohérent $\mathcal{T}_{\text{Fib}_{X,n}/\mathbb{C}}$ sur $\text{Fib}_{X,n}$.

LEMME (1.1). *Pour tout schéma S sur $\mathbb{C}$, $T^*\text{Fib}_{X,n}(S)$ est la catégorie des couples $(\mathcal{L}, \mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)$, où $\mathcal{L}$ est un fibré vectoriel de rang n sur $X \times_{\mathbb{C}} S$ et où u est un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} S}$ -modules.*

Preuve. Fixons un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur $X \times_{\mathbb{C}} S$, i.e. $\mathcal{L} \in \text{ob } \text{Fib}_{X,n}(S)$. Alors, un objet de $T^*\text{Fib}_{X,n}(S)$ au dessus de $\mathcal{L}$ est la donnée d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$ -modules

$$(\mathcal{T}_{\text{Fib}_{X,n}/\mathbb{C}}) \otimes_{\mathcal{O}_{\text{Fib}_{X,n}}} \mathcal{O}_S \rightarrow \mathcal{O}_S,$$

i.e. d'un homomorphisme de $\mathcal{O}_S$ -modules

$$R^1pr_{2*}\underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}, \mathcal{L}) \rightarrow \mathcal{O}_S$$

compte-tenu du théorème de changement de base (on a noté encore $pr_2: X \times_{\mathbb{C}} S \rightarrow S$ la projection canonique). Maintenant, un tel homomorphisme équivaut à une flèche

$$Rpr_{2*}\underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}, \mathcal{L})[1] \rightarrow \mathcal{O}_S$$

dans $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_S)$ et donc, par dualité de Grothendieck, à une flèche

$$\mathcal{O}_S \rightarrow Rpr_{2*}\underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)$$

dans $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_S)$, i.e. finalement, par adjonction, à un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} S}$ -modules

$$\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} S} \rightarrow \underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1).$$

D'où la conclusion. □

Ce lemme montre que $T^*\text{Fib}_{X,n}$ est le champ algébrique sur $\mathbb{C}$ des couples $(\mathcal{L}, u)$. En particulier, on a un homomorphisme $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T^*\text{Fib}_{X,n}}$ -linéaire universel

$$(1.2) \quad \tilde{u}: (id_X \times \tau)^* \tilde{\mathcal{L}} \rightarrow (id_X \times \tau)^* \tilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1.$$

Pour tout champ algébrique $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{C}$, tout fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$, tout homomorphisme $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}}$ -linéaire $u: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ et tout entier $i \geq 0$, on notera simplement

$$u^i: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_X^1)^{\otimes i}$$

l'homomorphisme composé

$$(u \otimes id_{(\Omega_X^1)^{\otimes (i-1)}}) \circ \cdots \circ (u \otimes id_{\Omega_X^1}) \circ u$$

et $\mathcal{K}_i$ et $\mathcal{C}_i$ les noyaux et conoyaux de u^i , de sorte que l'on a une suite exacte

$$(1.3) \quad 0 \rightarrow \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{u^i} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_X^1)^{\otimes i} \rightarrow \mathcal{C}_i \rightarrow 0$$

de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}}$ -modules cohérents. On a trivialement les inclusions

$$(1.4) \quad 0 = \mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{L}$$

et u induit, pour tout $i \geq 1$, un monomorphisme

$$(1.5) \quad (\mathcal{K}_{i+1}/\mathcal{K}_i) \xrightarrow{\bar{u}} (\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1}) \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1.$$

LEMME (1.6). *Supposons que les $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}}$ -modules cohérents $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n+1}$ soient tous plats sur $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$. Alors:*

(i) *pour tout $i = 1, \dots, n$, $\mathcal{L}/\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1}$ et $\mathcal{K}_i$ sont des fibrés vectoriels sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$;*

(ii) *pour tout entier $i > n$, $\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1} = 0$ et $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_n$.*

Preuve. Pour $i = 1, \dots, n+1$, $\mathcal{L}/\mathcal{K}_i$, $\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1}$ et $\mathcal{K}_i$ sont plats sur $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$ puisque l'on a les suites exactes

$$0 \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} (\Omega_X^1)^{\otimes i} \rightarrow \mathcal{C}_i \rightarrow 0$$

$$0 \rightarrow \mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1} \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{K}_{i-1} \rightarrow \mathcal{L}/\mathcal{K}_i \rightarrow 0$$

$$\text{et} \quad 0 \rightarrow \mathcal{K}_{i-1} \rightarrow \mathcal{K}_i \rightarrow \mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1} \rightarrow 0.$$

De plus, pour tout point s de $\mathcal{S}$, $(\mathcal{L}/\mathcal{K}_i)_{(s)}$, $(\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1})_{(s)}$ et $(\mathcal{K}_i)_{(s)}$ sont des fibrés vectoriels sur $X \times_{\mathbb{C}} s$ d'après (1.4), (1.5) et les "platitudes" ci-dessus. D'où

l'assertion (i) et le fait que $\mathcal{L}/\mathcal{K}_{n+1}$, $\mathcal{K}_{n+1}/\mathcal{K}_n$ et $\mathcal{K}_{n+1}$ sont des fibrés vectoriels sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$ (cf. [EGA], (0.6.6.19)).

Compte-tenu de (1.5), pour prouver l'assertion (ii), il suffit de montrer que $\mathcal{K}_{n+1}/\mathcal{K}_n = 0$, i.e. compte-tenu de ce qui précède, que $(\mathcal{K}_{n+1}/\mathcal{K}_n)_{(s)} = 0$ pour tout point s de $\mathcal{S}$. Or, on a, d'après (1.5),

$$\text{rang}(\mathcal{K}_{i+1}/\mathcal{K}_i)_{(s)} \leq \text{rang}(\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1})_{(s)},$$

pour $i = 1, \dots, n$, et, d'après ce qui précède,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \text{rang}(\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1})_{(s)} \leq \text{rang}(\mathcal{L}),$$

d'où la conclusion. $\square$

Définition (1.7). (i) On appellera type (resp. type nilpotent) pour X de rang n toute suite de couples d'entiers

$$(\nu, \lambda) = ((\nu_1, \lambda_1), \dots, (\nu_m, \lambda_m))$$

vérifiant les conditions suivantes:

$$\nu_1 \geq \dots \geq \nu_m > 0,$$

$$\sum_{i=1}^m \nu_i \leq n \quad \left(\text{resp.} \quad \sum_{i=1}^m \nu_i = n \right),$$

et

$$\lambda_{i+1} \leq \lambda_i + \nu_i(2g - 2)$$

dès que $\nu_i = \nu_{i+1}$ pour un $i = 1, \dots, m - 1$.

(ii) Avec les notations ci-dessus et pour (ν, λ) un type (resp. un type nilpotent) pour X de rang n , on dira que le couple $(\mathcal{L}, u)$ est de type (ν, λ) (resp. nilpotent de type (ν, λ)) si les conditions suivantes sont satisfaites:

- (a) les $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}}$ -modules cohérents $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_{n+1}$ sont tous plats sur $\mathcal{O}_{\mathcal{S}}$,
- (b) pour tout point s de $\mathcal{S}$ et tout $i = 1, \dots, m$, le rang et le degré du fibré vectoriel $(\mathcal{K}_i/\mathcal{K}_{i-1})_{(s)}$ sur $X \times_{\mathbb{C}} s$ sont égaux respectivement à ν_i et λ_i ,
- (c) pour tout entier $i > m$, $\mathcal{K}_i = \mathcal{K}_m$.

Remarque (1.8). (i) La longueur m d'un type (ν, λ) est nécessairement $\leq n$.

(ii) Si $\mathcal{S} = \text{Spec}(k)$, pour un corps $k \supset \mathbb{C}$, tout couple $(\mathcal{L}, u)$ admet un type et ce type est nilpotent si et seulement si $(\mathcal{L}, u)$ est nilpotent au sens de (0.2).

THÉORÈME (1.9). Soient $\mathcal{S}$ un champ algébrique sur $\mathbb{C}$ localement noethérien, $\mathcal{L}$ un fibré vectoriel de rang n sur $X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}$ et $u: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \times_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$ un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}}$ -modules.

Alors, il existe une et une seule stratification $(\mathcal{S}_{(v., \lambda.)})$ de $\mathcal{S}$, indexée par les types pour X de rang n , en sous-champs algébriques localement fermés, ayant la propriété suivante:

(*) pour tout schéma noethérien T sur $\mathbb{C}$, tout morphisme de champs $T \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ et tout type $(v., \lambda.)$, le couple $(\mathcal{L}_{(T)}, u_{(T)})$ sur $X \times_{\mathbb{C}} T$ (dédit de $(\mathcal{L}, u)$ par le changement de base f) est de type $(v., \lambda.)$ si et seulement si f se factorise par l'immersion localement fermée $\mathcal{S}_{(v., \lambda.)} \rightarrow \mathcal{S}$.

De plus, si l'on munit l'ensemble des partitions $v. = (v_1, \dots, v_m)$ ($v_1 \geq \dots \geq v_m > 0$, $\sum_{i=1}^m v_i \leq n$) de la relation d'ordre

$$v. \leq v' \Leftrightarrow (v_1 + \dots + v_i \leq v'_1 + \dots + v'_i, \forall i \geq 1)$$

(où l'on a posé $v_i = 0$ si $i > m$ et $v'_i = 0$ si $i > m'$), alors, pour chaque partition $v.$, le sous-champ algébrique

$$\bar{\mathcal{S}}_{v.} = \bigcup_{\substack{(v', \lambda') \\ v' \geq v.}} \mathcal{S}_{(v', \lambda')}$$

de $\mathcal{S}$ est fermé.

Remarque (1.10). Par définition d'une stratification, pour tout ouvert noethérien $\mathcal{U}$ de $\mathcal{S}$, $\mathcal{U} \cap \mathcal{S}_{(v., \lambda.)} = \emptyset$ sauf pour un nombre fini de types $(v., \lambda.)$. Le théorème (1.9) contient donc en particulier l'assertion que le type de $(\mathcal{L}_{(s)}, u_{(s)})$ n'a qu'un nombre fini de valeurs possibles quand s parcourt les points d'un ouvert noethérien de $\mathcal{S}$.

Preuve de (1.9). Considérons les $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} \mathcal{S}}$ -modules cohérents $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_{n+1}$. D'après Mumford ([Mu], Lecture 8), il existe une et une seule stratification $(\mathcal{S}_{(v., \lambda.)})$ de $\mathcal{S}$, indexée par les types pour X de rang n , en sous-champs algébriques localement fermés de $\mathcal{S}$, ayant la propriété suivante:

(**) pour tout schéma noethérien T sur $\mathbb{C}$, tout morphisme de champs $T \xrightarrow{f} \mathcal{S}$ et tout type $(v., \lambda.)$, les $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} T}$ -modules cohérents $\mathcal{C}_{1(T)}, \mathcal{C}_{2(T)}, \dots, \mathcal{C}_{m(T)}, \dots, \mathcal{C}_{n+1(T)}$ sont $\mathcal{O}_T$ -plats de rang générique

$$v_1, v_1 + v_2, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_m, \dots, v_1 + v_2 + \dots + v_m$$

et de degré

$$\lambda_1 + n(2g - 2), \lambda_1 + \lambda_2 + 2n(2g - 2), \dots$$

$$\dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_m + mn(2g - 2), \dots, \lambda_1 + \dots + \lambda_m + (n + 1)n(2g - 2)$$

respectivement dans chaque fibre de la projection canonique $X \times_{\mathbb{C}} T \rightarrow T$ si et seulement si f se factorise par l'immersion localement fermée $\mathcal{S}_{(v., \lambda.)} \rightarrow \mathcal{S}$.

Comme la formation des conoyaux commute aux changements de base, la propriété $(**)$ coïncide avec la propriété $(*)$ (cf. (1.6)), d'où la première assertion du théorème.

Maintenant, le support de $\bar{\mathcal{P}}_\nu$ est formé des points s de $\mathcal{S}$ tel que le rang générique de $\mathcal{C}_{i(s)}$ soit supérieur ou égal à $\nu_1 + \dots + \nu_i$ pour $i = 1, \dots, n$ (on a posé $\nu_i = 0$ si $i > m$). Or les fonctions "rang générique de $\mathcal{C}_{i(s)}$ " ($i = 1, \dots, n$) du point s de $\mathcal{S}$ sont semi-continues supérieurement (cf. [EGA], (15.1.1)), d'où la seconde assertion du théorème. $\square$

En particulier, pour $\mathcal{S} = T^*\text{Fib}_{X,n}$ et pour $(\mathcal{L}, u)$ le couple universel (1.2), on posera

$$(1.11) \quad \Lambda_{X,n} = \bar{\mathcal{P}}_{(1^n)},$$

où (1^n) est la partition $(1, \dots, 1)$ de n , et

$$(1.12) \quad \Lambda_{X,(\nu, \lambda)} = \mathcal{S}_{(\nu, \lambda)}$$

pour tout type nilpotent (ν, λ) pour X de rang n .

Remarques (1.13). (i) $(\Lambda_{X,(\nu, \lambda)})$, pour (ν, λ) parcourant les types nilpotents, est une stratification de $\Lambda_{X,n}$.

(ii) Pour tout entier $\ell \in \mathbb{Z}$, $\Lambda_{X,(\nu, \ell)}$ est la section nulle de $T^*\text{Fib}'_{X,n}$; plus généralement, pour tout type nilpotent (ν, λ) , $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ est le champ algébrique des couples $(\mathcal{L}, u)$ de type (ν, λ) .

(iii) Chacun des sous-champs algébriques $\Lambda_{X,n}$ et $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ de $T^*\text{Fib}_{X,n}$ est un fibré en cônes sur $\text{Fib}_{X,n}$.

Définition (1.14). On appellera cône nilpotent pour X de rang n le fermé conique $\Lambda_{X,n}$ de $T^*\text{Fib}_{X,n}$ défini ci-dessus. La stratification $(\Lambda_{X,(\nu, \lambda)})$ de $\Lambda_{X,n}$ par les types nilpotents sera dite canonique.

2. Les champs algébriques $\text{Fib}_{X,\nu}^\lambda$. Fixons une suite d'entiers strictement positifs $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$ telle que $\nu_1 + \dots + \nu_m = n$ et une suite d'entiers $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$ de même longueur que ν ; on pose $\ell = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$.

Pour tout schéma S sur $\mathbb{C}$, soit $\text{Fib}_{X,\nu}^\lambda(S)$ la catégorie dont les objets sont les drapeaux de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} S}$ -modules

$$(2.1) \quad \mathcal{L} = (0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_m = \mathcal{L})$$

où, pour $i = 1, \dots, m$, $\mathcal{L}_i$ est un fibré vectoriel sur $X \times_{\mathbb{C}} S$ tel que $\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}$ soit $\mathcal{O}_S$ -plat et que, pour tout point s de S , le $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} S}$ -module cohérent $(\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1})_{(s)}$ ait pour rang générique ν_i et pour degré λ_i ; les flèches de cette catégorie sont les

isomorphismes de drapeaux. On a un foncteur

$$(2.2) \quad \pi_{X, \nu}^{\lambda}: \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda}(S) \rightarrow \text{Fib}_{X, n}^{\ell}$$

qui envoie $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{L}$.

LEMME (2.3). *Le 2-foncteur $S \rightarrow \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda}(S)$ est un champ algébrique sur $\mathbb{C}$ et le morphisme $\pi_{X, \nu}^{\lambda}: \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda} \rightarrow \text{Fib}_{X, n}^{\ell}$ est un morphisme de champs algébriques qui est représentable et projectif.*

Preuve. C'est une conséquence immédiate du théorème de Grothendieck de représentabilité des foncteurs Quot^P ([Gr], Théorème 3.2). $\square$

Comme dans le numéro précédent, on notera par $\tilde{\mathcal{L}}$ le fibré vectoriel de rang n universel sur $X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X, n}^{\ell}$ et $pr_1: X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X, n}^{\ell} \rightarrow X$, $pr_2: X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X, n}^{\ell} \rightarrow \text{Fib}_{X, n}^{\ell}$ les projections canoniques. De plus, on notera

$$(2.4) \quad \tilde{\mathcal{L}} = (0 = \tilde{\mathcal{L}}_0 \subset \tilde{\mathcal{L}}_1 \subset \dots \subset \tilde{\mathcal{L}}_m = (id_X \times \pi_{X, \nu}^{\lambda})^* \tilde{\mathcal{L}})$$

le drapeau universel sur $X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda}$ et encore $pr_1: X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda} \rightarrow X$ et $pr_2: X \times_{\mathbb{C}} \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda} \rightarrow \text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda}$ les projections canoniques.

Soient R une $\mathbb{C}$ -algèbre, $I \subset R$ un idéal de carré nul, $R_o = R/I$ et $\mathcal{L}_{o, \cdot}$ un objet de $\text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda}(R_o)$. On considère $\mathcal{L}_{o, \cdot}$ comme un $\mathcal{O}_{X \otimes_{\mathbb{C}} R_o}$ -module filtré (à filtration croissante) en posant

$$F_i(\mathcal{L}_{o, \cdot}) = \mathcal{L}_{o, i} \quad (i = 0, \dots, m);$$

on peut alors former le R Hom filtré (cf. [II], V, (2.2))

$$R \underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}_{o, \cdot}, \mathcal{L}_{o, \cdot}) \in \text{ob } D_{\text{coh}}^b F^{(-m, m-1)}(\mathcal{O}_{X \otimes_{\mathbb{C}} R_o}).$$

PROPOSITION (2.5). *La théorie des déformations de $\mathcal{L}_{o, \cdot}$ en un objet $\mathcal{L}$ de $\text{Fib}_{X, \nu}^{\lambda}(R)$ est contrôlée par le complexe de $D^b(R_o)$*

$$R\Gamma(X \otimes_{\mathbb{C}} R_o, F_0 R \underline{\text{Hom}}(\mathcal{L}_{o, \cdot}, \mathcal{L}_{o, \cdot})) \otimes_{R_o} I.$$

L'obstruction à déformer $\mathcal{L}_{o, \cdot}$ en $\mathcal{L}$ est donc un élément du H^2 de ce complexe et, si cette obstruction est nulle, l'ensemble des déformations $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_{o, \cdot}$ est un tore sous le H^1 de ce complexe alors que le groupe des automorphismes d'une déformation donnée s'identifie canoniquement au H^0 de ce complexe.

Preuve. C'est une variante filtrée de [II], IV, (3.1.5), et les détails de la démonstration sont laissés aux lecteurs. $\square$

Considérons maintenant le complexe filtrée

$$(2.6) \quad R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}}.) \in \mathrm{ob} D_{\mathrm{coh}}^b F^{(-m, m-1)}(\mathcal{O}_{X \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{Fib}_{X, v}^{\lambda}});$$

on a clairement

$$F_{m-1} R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}}.) = (id_X \times \pi_{X, v}^{\lambda})^* R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}}.),$$

et donc le triangle distingué

$$(2.7) \quad \begin{array}{ccc} & (\pi_{X, v}^{\lambda})^* R pr_{2*} R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}}.) & \\ +1 \swarrow & & \nwarrow \\ R pr_{2*}(F_{m-1}/F_0) R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}}.)[-1] & \longrightarrow & R pr_{2*} F_0 R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}}.) \end{array}$$

dans $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathrm{Fib}_{X, v}^{\lambda})$. Dualement, on a, compte-tenu de la dualité de Grothendieck, le triangle distingué dans $D_{\mathrm{coh}}^b(\mathrm{Fib}_{X, v}^{\lambda})$

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccc} & (\pi_{X, v}^{\lambda})^* R pr_{2*} R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) & \\ \swarrow & & \nwarrow +1 \\ R pr_{2*}(F_{m-1}/F_{-1}) R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) & \longrightarrow & R pr_{2*} F_{-1} R \underline{\mathrm{Hom}}(\tilde{\mathcal{L}}., \tilde{\mathcal{L}} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)[1] \end{array}$$

(le dual de (F_{m-1}/F_0) est l'orthogonal de F_0 , i.e. ici F_{-1}).

COROLLAIRE (2.9). *Le triangle distingué de la théorie du complexe cotangent pour le morphisme $\pi_{X, v}^{\lambda}$ (cf. [II], II, (2.1.5.6)),*

$$\begin{array}{ccc} & (\pi_{X, v}^{\lambda})^* L_{\mathrm{Fib}'_{X, n}/\mathbb{C}} & \\ \swarrow & & \nwarrow +1 \\ L_{\mathrm{Fib}_{X, v}/\mathbb{C}} & \longrightarrow & L_{\mathrm{Fib}_{X, v}/\mathrm{Fib}'_{X, n}} \end{array}$$

s'identifie canoniquement au triangle distingué (2.8).

COROLLAIRE (2.10). *Le champ algébrique $\mathrm{Fib}_{X, v}^{\lambda}$ est lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $\sum_{1 \leq i \leq j \leq m} (v_i \lambda_j - v_j \lambda_i + v_i v_j (g-1))$.*

Preuve. Pour tout corps k contenant $\mathbb{C}$ et tout $\mathcal{L}_\bullet \in \text{ob Fib}_{X,v}^{\lambda_\bullet}(k)$, $R\text{Hom}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{L}_\bullet)$ n'a de cohomologie qu'en degré 0 et 1 et la cohomologie en degré 1 est à support fini dans $X \otimes_{\mathbb{C}} k$ (le gradué de $R\text{Hom}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{L}_\bullet)$ est la somme directe des $R\text{Hom}(\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}, \mathcal{L}_j/\mathcal{L}_{j-1})$ ($i, j = 1, \dots, m$) et chacun de ces $R\text{Hom}$ est bien concentré en degré 0 et 1 avec, en degré 1, un support fini dans $X \otimes_{\mathbb{C}} k$). Par suite, $Rpr_2 F_0 R\text{Hom}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{L}_\bullet)$ n'a de cohomologie qu'en degrés 0 et 1, compte-tenu de la platitude des quotients $\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}$ sur $\text{Fib}_{X,v}^{\lambda_\bullet}$. D'où la lissité cherchée.

Pour tout corps k contenant $\mathbb{C}$ et tout $\mathcal{L}_\bullet \in \text{ob Fib}_{X,v}^{\lambda_\bullet}(k)$, on a

$$\begin{aligned} \chi(X \otimes_{\mathbb{C}} k, F_0 R\text{Hom}(\mathcal{L}_\bullet, \mathcal{L}_\bullet)[1]) \\ = - \sum_{1 \leq i \leq j \leq m} \chi(X \otimes_{\mathbb{C}} k, R\text{Hom}(\mathcal{L}_j/\mathcal{L}_{j-1}, \mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1})) \end{aligned}$$

d'où la formule annoncée pour la dimension de $\text{Fib}_{X,v}^{\lambda_\bullet}$ sur $\mathbb{C}$, par Riemann-Roch. $\square$

3. Le théorème principal. Passons à la démonstration de (0.3). Plus précisément, nous allons montrer le résultat suivant:

THÉOREME (3.1). *Pour tout type nilpotent $(v, \lambda_\bullet)$ pour X de rang n , le sous-champ localement fermé conique*

$$\Lambda_{X,(v,\lambda_\bullet)} \subset T^*\text{Fib}_{X,n}$$

défini en (1.12) est soit vide soit lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $n^2(g-1)$, et lagrangien dans $T^\text{Fib}_{X,n}$.*

COROLLAIRE (3.2). *Le sous-champ fermé conique $\Lambda_{X,n}$ de $T^*\text{Fib}_{X,n}$ est réduit, purement de dimension $n^2(g-1)$ et lagrangien dans $T^*\text{Fib}_{X,n}$.*

Preuve de (3.1). Fixons un type nilpotent $(v, \lambda_\bullet)$ tel que $\Lambda_{X,(v,\lambda_\bullet)}$ soit non vide (un tel type existe toujours car $\Lambda_{X,n}(\mathbb{C})$ est non vide: prendre $\mathcal{L} \in \text{ob Fib}_{X,n}(\mathbb{C})$ très instable, par exemple $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X^n$, alors il existe un homomorphisme nilpotent $u: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$). On pose $\ell = \lambda_1 + \dots + \lambda_m$, de sorte que $\Lambda_{X,(v,\lambda_\bullet)} \subset \text{Fib}_{X,n}'$.

On considère alors le morphisme de champs

$$\pi = \pi_{X,v}^{\lambda_\bullet}: \text{Fib}_{X,v}^{\lambda_\bullet} \rightarrow \text{Fib}_{X,n}'$$

défini en (2.2), et le diagramme correspondant de l'application cotangente (cf. Appendice A)

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell} \times_{\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell}} \mathrm{Fib}_{X,v}^{\lambda} & \xrightarrow{\Pi} & T^*\mathrm{Fib}_{X,v}^{\lambda} \\ \bar{\pi} \downarrow & & \\ T^*\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell} & & \end{array}$$

On note Σ le sous-champ fermé de $T^*\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell} \times_{\mathrm{Fib}_{X,n}^{\ell}} \mathrm{Fib}_{X,v}^{\lambda}$, image réciproque par Π de la section nulle de $T^*\mathrm{Fib}_{X,v}^{\lambda}$. D'après (2.9), pour tout schéma S sur $\mathbb{C}$, $\Sigma(S)$ est la catégorie des couples

$$(\mathcal{L}, \mathcal{O}_S \rightarrow R^0 pr_{2*} F_{-1} R \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{L}, \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)),$$

i.e. des couples

$$(\mathcal{L}, \mathcal{L} \xrightarrow{u} \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)$$

où

$$\mathcal{L} = (0 = \mathcal{L}_0 \subset \mathcal{L}_1 \subset \dots \subset \mathcal{L}_m = \mathcal{L})$$

est un objet de $\mathrm{Fib}_{X,v}^{\lambda}(S)$ et où u est un homomorphisme de $\mathcal{O}_{X \times_{\mathbb{C}} S}$ -modules tel que

$$u(\mathcal{L}_i) \subset \mathcal{L}_{i-1} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1,$$

pour $i = 1, \dots, m$; en particulier, pour un tel $(\mathcal{L}, u) \in \mathrm{ob} \Sigma(S)$, on a

$$\mathcal{L}_i \subset \mathcal{K}_i$$

pour $i = 1, \dots, m$, avec les notations de (1.3).

Appliquons alors (1.9) à Σ et à la restriction à Σ de l'homomorphisme universel (1.2). On obtient en particulier une strate $\Sigma_{(v, \lambda)}$ et on vérifie facilement que l'immersion $\Sigma_{(v, \lambda)} \rightarrow \Sigma$ est ouverte et que la restriction de $\bar{\pi}$ à $\Sigma_{(v, \lambda)}$ est un isomorphisme de $\Sigma_{(v, \lambda)}$ sur $\Lambda_{X, (v, \lambda)}$ (pour $(\mathcal{L}, u) \in \mathrm{ob} \Sigma_{(v, \lambda)}(S)$, on a $\mathcal{L}_i = \mathcal{K}_i$, pour $i = 1, \dots, m$).

On est donc dans les conditions d'applications de la proposition suivante (qui sera démontrée dans l'appendice A) et le théorème (3.1) s'en suit aussitôt. $\square$

PROPOSITION (3.3). *Soient $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ deux champs algébriques et lisses sur $\mathbb{C}$, $f: \mathcal{S}' \rightarrow \mathcal{S}$ un morphisme de champs représentable et*

$$\begin{array}{ccc} T^*\mathcal{S} \times_{\mathcal{S}} \mathcal{S}' & \xrightarrow{F} & T^*\mathcal{S}' \\ \bar{f} \downarrow & & \\ T^*\mathcal{S} & & \end{array}$$

le diagramme de l'application cotangente de f (cf. Appendice A). On pose

$$\mathcal{W} = F^{-1}(T_{\mathcal{S}}^* \mathcal{S}'),$$

où $T_{\mathcal{S}}^*$, $\mathcal{S}'$ est la section nulle de $T^* \mathcal{S}'$, et on suppose qu'il existe un ouvert non vide $\mathcal{W}^0$ de $\mathcal{W}$ qui s'envoie isomorphiquement par $\tilde{f}$ sur un sous-champ algébrique localement fermé $\mathcal{V}$ de $T^* \mathcal{S}$. Alors, $\mathcal{V}$ est lisse sur $\mathbb{C}$ et lagrangien dans $T^* \mathcal{S}$. En particulier, si $\mathcal{S}$ est de plus purement de dimension $d_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{V}$ est aussi purement de dimension $d_{\mathcal{S}}$.

Suivant Drinfeld ([Dr]), on posera la définition suivante:

Définition (3.4). Soit k un corps contenant $\mathbb{C}$. Un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ sur $X \otimes_{\mathbb{C}} k$ de rang n sera dit très stable s'il n'existe pas d'homomorphisme nilpotent de $\mathcal{O}_{X \otimes_{\mathbb{C}} k}$ -modules

$$u: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1$$

autre que zéro.

PROPOSITION (3.5). Les points de $\text{Fib}_{X,n}$ correspondant à des fibrés vectoriels très stables forment un ouvert dense de $\text{Fib}_{X,n}$. Si $g > 0$, cet ouvert dense est contenu dans l'ouvert dense de $\text{Fib}_{X,n}$ formé des fibrés vectoriels semi-stables au sens de Mumford.

Preuve. La première assertion résulte de (3.1). Pour la seconde, il suffit de démontrer que, pour tout corps k contenant $\mathbb{C}$, un fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} k$ qui n'est pas semi-stable n'est pas non plus très stable. Or, pour un tel fibré, il existe un sous-fibré $\mathcal{L}' \rightarrow \mathcal{L}$ et un fibré quotient $\mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathcal{L}''$, avec $\mathcal{L}'$ et $\mathcal{L}''$ semi-stables et $\mu(\mathcal{L}') > \mu(\mathcal{L}) > \mu(\mathcal{L}'')$, où μ est la "pente" (le quotient du degré par le rang). Alors, on a $\text{Hom}(\mathcal{L}', \mathcal{L}'') = 0$ et $\chi(R \text{Hom}(\mathcal{L}', \mathcal{L}'')) < 0$, d'où $\text{Hom}(\mathcal{L}'', \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1) \neq 0$; maintenant, si $v \in \text{Hom}(\mathcal{L}'', \mathcal{L}' \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega_X^1)$, $v \neq 0$, le composé

$$\mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathcal{L}'' \xrightarrow{v} \mathcal{L} \otimes_X \Omega_X^1 \rightarrow \mathcal{L} \otimes_X \Omega_X^1$$

est clairement nilpotent et non nul. □

Remarques (3.6). (i) Pour $g = 0$, $\mathcal{O}_X^{n'} \oplus \mathcal{O}_X(1)^{n''}$ ($n' \geq 0$, $n'' > 0$, $n' + n'' = n$) est à la fois très stable et non semi-stable.

(ii) Dans [Dr], Drinfeld annonce que les fibrés très stables forment un ouvert dense de $\text{Fib}_{X,n}$ dont le complémentaire est purement de codimension 1; je n'ai pas vérifié cette dernière assertion.

Un argument standard (rappelé dans l'appendice A) montre, compte-tenu de (3.1), qu'il existe pour chaque type nilpotent (ν, λ) pour X de rang n un unique sous-champ fermé réduit

$$(3.7) \quad \overline{\text{Fib}}_{X,(\nu, \lambda)} \subset \text{Fib}_{X,n}$$

tel que $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ soit un ouvert dense du fibré conormal à $\overline{\text{Fib}}_{X,(\nu, \lambda)}$ dans $\text{Fib}_{X,n}$. Plus précisément, le fermé $\overline{\text{Fib}}_{X,(\nu, \lambda)}$ est l'adhérence dans $\text{Fib}_{X,n}$ de l'image de $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ par la projection canonique du fibré cotangent de $\text{Fib}_{X,n}$.

Pour certains types nilpotents (ν, λ) , on peut identifier $\overline{\text{Fib}}_{X,(\nu, \lambda)}$ à l'adhérence d'une strate de la stratification de Shatz de $\text{Fib}_{X,n}$. Rappelons tout d'abord que tout fibré vectoriel $\mathcal{L}$ de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} k$, où k est un corps contenant $\mathbb{C}$, admet une filtration canonique par des sous-fibrés vectoriels, dite de Harder-Narasimhan,

$$0 = F_0 \mathcal{L} \subset F_1 \mathcal{L} \subset \dots \subset F_s \mathcal{L} = \mathcal{L},$$

qui est caractérisée par la propriété suivante: pour tout $j = 1, \dots, s$, le fibré vectoriel

$$\text{gr}_j^F \mathcal{L} = F_j \mathcal{L} / F_{j-1} \mathcal{L}$$

est semi-stable, de rang et de degré notés respectivement ρ_j et δ_j et on a les inégalités

$$\frac{\delta_1}{\rho_1} > \dots > \frac{\delta_s}{\rho_s}$$

(cf. [Ha-Na], (1.3.9)). Le *polygône de Harder-Narasimhan* $P_{\mathcal{L}}$ de $\mathcal{L}$ est le polygône concave à s côtés dans $\mathbb{R}^2$ dont le j -ième côté est le segment qui relie le point $(\rho_1 + \dots + \rho_{j-1}, \delta_1 + \dots + \delta_{j-1})$ au point $(\rho_1 + \dots + \rho_j, \delta_1 + \dots + \delta_j)$. Le champ algébrique $\text{Fib}_{X,n}$ admet une stratification canonique, dite de Shatz,

$$(\text{Fib}_{X,P})$$

indexée par les polygônes concaves à un nombre fini de côtés et d'origine $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ (cf. [Sh], Théorème 3). La strate $\text{Fib}_{X,P}$ est localement fermée dans $\text{Fib}_{X,n}$ et lisse sur $\mathbb{C}$ et les objets de $\text{Fib}_{X,P}(k)$ sont les fibrés vectoriels $\mathcal{L}$ de rang n sur $X \otimes_{\mathbb{C}} k$ tels que $P_{\mathcal{L}} = P$. Pour deux polygônes P et P' comme ci-dessus on dit que $P \leq P'$ si P et P' ont même extrémité et si P' est au-dessus de P dans $\mathbb{R}^2$; alors, pour tout P , la réunion de strates

$$\bigcup_{P' \geq P} \text{Fib}_{X,P'}$$

est fermée dans $\text{Fib}_{X,n}$.

PROPOSITION (3.8). *Pour tout type nilpotent (ν, λ) pour X de rang n tel que*

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1} > \dots > \frac{\lambda_m}{\nu_m},$$

le sous-champ fermé réduit $\overline{\text{Fib}}_{X,(\nu, \lambda)}$ de $\text{Fib}_{X,n}$ défini en (3.7) est l'adhérence dans $\text{Fib}_{X,n}$ de la strate de Shatz $\text{Fib}_{X, P_{(\nu, \lambda)}}$, où $P_{(\nu, \lambda)}$ est le polygone à m côtés dans $\mathbb{R}^2$ dont le i -ième côté est le segment qui relie $(\nu_1 + \dots + \nu_{i-1}, \lambda_1 + \dots + \lambda_{i-1})$ à $(\nu_1 + \dots + \nu_i, \lambda_1 + \dots + \lambda_i)$.

Preuve. Considérons l'ouvert dense de $\text{Fib}_{X, \nu}^\lambda$ formé des $\mathcal{L}_i$ tels que les quotients successifs $\mathcal{L}_i/\mathcal{L}_{i-1}$ ($i = 1, \dots, m$) soient des fibrés vectoriels semi-stables. Alors, la restriction de $\pi_{X, \nu}^\lambda$ à cet ouvert dense est un isomorphisme de cet ouvert dense de $\text{Fib}_{X, \nu}^\lambda$ sur $\text{Fib}_{X, P_{(\nu, \lambda)}}$. Par suite, avec les notations de la preuve de (3.1), la restriction de $\bar{\pi}(\Sigma) \subset T^*\text{Fib}_{X,n}$ à $\text{Fib}_{X, P_{(\nu, \lambda)}}$ n'est autre que le fibré conormal à cette strate $\text{Fib}_{X, P_{(\nu, \lambda)}}$ dans $\text{Fib}_{X,n}$. Il en résulte que $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ rencontre le fibré conormal de $\text{Fib}_{X, P_{(\nu, \lambda)}}$ dans $\text{Fib}_{X,n}$ suivant un ouvert dense. D'où la conclusion. $\square$

Remarques (3.9). (i) Quand le type (ν, λ) ne vérifie pas les inégalités

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1} > \dots > \frac{\lambda_m}{\nu_m},$$

le sous-champ fermé $\overline{\text{Fib}}_{X,(\nu, \lambda)}$ de $\text{Fib}_{X,n}$ est plus difficile à identifier. Je n'ai traité pour l'instant que le cas $n = 2$ (voir [La], (6.2.2)) (le cas $n = 1$ est trivial).

(ii) L'irréductibilité des strates de Shatz entraîne l'irréductibilité des $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ pour les types (ν, λ) vérifiant

$$\frac{\lambda_1}{\nu_1} > \dots > \frac{\lambda_m}{\nu_m}.$$

Je ne sais pas démontrer l'irréductibilité de $\Lambda_{X,(\nu, \lambda)}$ en général.

4. Preuve à la Atiyah et Bott de (0.3) (esquisse). Soit G un groupe algébrique réductif sur $\mathbb{C}$. On note $\text{Fib}_{X,G}$ le champ algébrique sur $\mathbb{C}$ des fibrés principaux homogènes sous le X -schéma en groupes $G \times_{\mathbb{C}} X$ et $\text{Fib}_{X,G}^0$ la composante connexe du fibré trivial dans $\text{Fib}_{X,G}$ (pour $G = GL_n$, $\text{Fib}_{X,G} = \text{Fib}_{X,n}$ et $\text{Fib}_{X,G}^0$ est la composante connexe de $\text{Fib}_{X,n}$ des fibrés vectoriels de degré 0).

$\text{Fib}_{X,G}$ est lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $(g-1)\dim G$ et la variété analytique sous-jacente à $\text{Fib}_{X,G}^0$ admet suivant Atiyah et Bott (cf. [A-B]) la présentation suivante. On note $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G et, pour tout couple d'entiers (p, q) avec $p, q \geq 0$, $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ l'espace vectoriel des formes différentielles de type (p, q) sur X ; $\mathcal{A}^0(X) = \mathcal{A}^{0,0}(X)$ est donc l'anneau des fonctions complexes $\mathcal{C}^\infty$ sur X et chaque $\mathcal{A}^{p,q}(X)$ est un $\mathcal{A}^0(X)$ -module projectif de type fini. Le groupe de gauge

$$\mathcal{G} = G(\mathcal{A}^0(X))$$

agit sur l'espace affine

$$\mathcal{C} = \mathfrak{g}(\mathcal{A}^{0,1}(X))$$

des structures holomorphes sur le fibré principal homogène $\mathcal{G}^\infty$ trivial $G \times X \rightarrow X$ par

$$(4.1) \quad (A, \Gamma) \rightarrow A\Gamma A^{-1} + \bar{\partial}A \cdot A^{-1}$$

et on a

$$(4.2) \quad \text{Fib}_{X,G}^0 = \mathcal{G} \setminus \mathcal{C}$$

($\mathcal{C}$ est l'espace de modules des couples (P, α) , où P est un fibré principal homogène holomorphe sous $G \times X$ et où α est un isomorphisme du fibré $\mathcal{G}^\infty$ sous-jacent à P sur le fibré $\mathcal{G}^\infty$ trivial $G \times X \rightarrow X$).

Cette présentation de $\text{Fib}_{X,G}^0$ induit la présentation suivante de $T^*\text{Fib}_{X,G}^0$. On a

$$(4.3) \quad T^*\mathcal{C} = \mathcal{C} \times \mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X)):$$

$\mathcal{C}$ est un espace affine sous l'espace vectoriel $\mathfrak{g}(\mathcal{A}^{0,1}(X))$ et cet espace vectoriel est en dualité avec $\mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X))$ grâce à l'accouplement naturel

$$\langle , \rangle : \mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X)) \times \mathfrak{g}(\mathcal{A}^{0,1}(X)) \rightarrow \mathcal{A}^{1,1}(X)$$

et à la forme trace

$$\int_X : \mathcal{A}^{1,1}(X) \rightarrow \mathbb{C}.$$

Par suite, le diagramme de l'application cotangente

$$\begin{array}{ccc} T^*\text{Fib}_{X,G}^0 \times_{\text{Fib}_{X,G}^0} \mathcal{C} & \xrightarrow{\Phi} & T^*\mathcal{C} \\ \bar{\Phi} \downarrow & & \\ T^*\text{Fib}_{X,G}^0 & & \end{array}$$

identifie $T^*\text{Fib}_{X,G}^0$ au quotient du fermé

$$\tilde{T}^*\text{Fib}_{X,G}^0 = \{(\Gamma, U) | \bar{\partial}U - [U, \Gamma] = 0\}$$

de $T^*\mathcal{C}$ (où $[U, \Gamma] = U \wedge \Gamma + \Gamma \wedge U$) par l'action coadjointe de $\mathcal{G}$

$$(4.4) \quad (A, (\Gamma, U)) \rightarrow (A\Gamma A^{-1} + \bar{\partial}A \cdot A^{-1}, A \cup A^{-1}).$$

Considérons maintenant le fermé $\tilde{\Lambda}_G$ de $\tilde{T}^*\text{Fib}_{X,G}^0$ (et donc de $T^*\mathcal{C}$) défini par

$$(4.5) \quad \tilde{\Lambda}_G = \{(\Gamma, U) | \bar{\partial}U - [U, \Gamma] = 0 \text{ et } U \text{ est nilpotent}\}.$$

Il est clair que l'action coadjointe de $\mathcal{G}$ sur $T^*\mathcal{C}$ préserve $\tilde{\Lambda}_G$.

Définition (4.6). Le cône nilpotent de $T^*\text{Fib}_{X,G}^0$ est le fermé Λ_G de $T^*\text{Fib}_{X,G}^0$ quotient du fermé $\tilde{\Lambda}_G$ de $\tilde{T}^*\text{Fib}_{X,G}^0$ par l'action coadjointe de $\mathcal{G}$.

Remarque (4.7). Soit $p_1, \dots, p_r$ une base des polynômes sur $\mathfrak{g}^*$ invariants pour l'action coadjointe de G formée de polynômes homogènes de degrés $d_1, \dots, d_r$, respectivement. Suivant Hitchin (cf. [Hi], §4), on a une application analytique

$$p: \tilde{T}^*\text{Fib}_{X,G}^0 \rightarrow \bigoplus_{i=1}^r H^0\left(X, (\Omega_X^1)^{\otimes d_i}\right)$$

définie par

$$p(\Gamma, U) = (p_1(U), \dots, p_r(U))$$

(de $\bar{\partial}U - [\Gamma, U] = 0$, on déduit aussitôt que $\bar{\partial}(p_i(U)) = 0$ pour $i = 1, \dots, r$). Alors $\tilde{\Lambda}_G$ n'est autre que $p^{-1}(0)$.

THÉORÈME (4.8). *Le fermé Λ_G de $T^*\text{Fib}_{X,G}^0$ est lagrangien.*

Preuve de (4.8) (esquisse). Tout d'abord "la dimension de Λ_G est partout supérieure ou égale à celle de $\text{Fib}_{X,G}^0$ " car $\tilde{\Lambda}_G = p^{-1}(0)$ et, si G est semi-simple

$$\sum_{i=1}^r \dim_{\mathbb{C}} H^0\left(X, (\Omega_X^1)^{\otimes d_i}\right) = \dim \text{Fib}_{X,G}^0$$

(cf. [Hi], 4.1), avec les notations de 4.7.

Il reste donc à voir que Λ_G est isotrope. Or $\tilde{\Lambda}_G$ est réunion localement finie de strates de la forme

$$\{(\Gamma, U) | \bar{\partial}U - [U, \Gamma] = 0 \text{ et } U \in \mathcal{O}^*\}$$

où $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X))$ est une orbite coadjointe nilpotente de $\mathcal{G}((A, U) \rightarrow AUA^{-1})$. Le théorème (4.8) résulte donc de la proposition (4.9) ci-dessous. $\square$

PROPOSITION (4.9). *Soit $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X))$ une orbite pour l'action coadjointe de $\mathcal{G}$. Alors la 2-forme symplectique canonique ω de $T^*\mathcal{C}$ s'annule identiquement sur*

$$\{(\Gamma, U) | \bar{\partial}U - [U, \Gamma] = 0 \text{ et } U \in \mathcal{O}^*\}.$$

Preuve de (4.9). Fixons $(\Gamma_o, U_o) \in T^*\mathcal{C}$ avec $\bar{\partial}U_o - [U_o, \Gamma_o] = 0$ et $U_o \in \mathcal{O}^*$. La 2-forme symplectique canonique sur $T^*\mathcal{C}$ en (Γ_o, U_o) n'est autre que

$$\omega_{(\Gamma_o, U_o)}((\dot{\Gamma}_1, \dot{U}_1), (\dot{\Gamma}_2, \dot{U}_2)) = \int_X (\langle \dot{U}_1, \dot{\Gamma}_2 \rangle - \langle \dot{U}_2, \dot{\Gamma}_1 \rangle)$$

où $(\dot{\Gamma}_1, \dot{U}_1)$ et $(\dot{\Gamma}_2, \dot{U}_2) \in T_{(\Gamma_o, U_o)}(T^*\mathcal{C})$ identifié à $\mathfrak{g}(\mathcal{A}^{0,1}(X)) \times \mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X))$.

D'autre part, l'espace tangent à la sous-variété localement fermée $\{(\Gamma, U) \mid \bar{\partial}U - [U, \Gamma] = 0 \text{ et } U \in \mathcal{O}^*\}$ de $T^*\mathcal{C}$ en (Γ_o, U_o) s'identifie clairement au sous-espace suivant de $\mathfrak{g}(\mathcal{A}^{0,1}(X)) \times \mathfrak{g}^*(\mathcal{A}^{1,0}(X))$:

$$\{(\dot{\Gamma}, \dot{U}) \mid \exists \dot{A} \in \mathfrak{g}(\mathcal{A}^0(X)) \text{ avec } \dot{U} = -[U_o, \dot{A}] \text{ et} \\ [U_o, \bar{\partial}\dot{A} + [\dot{A}, \Gamma_o] - \dot{\Gamma}] = 0\}$$

(on a $\text{Lie}(\mathcal{G}) = \mathfrak{g}(\mathcal{A}^0(X))$), on a

$$T_{U_o}\mathcal{O}^* = \{\dot{U} \mid \exists \dot{A} \in \mathfrak{g}(\mathcal{A}^0(X)) \text{ avec } \dot{U} = -[U_o, \dot{A}]\}$$

et on a, pour $\dot{U} = -[U_o, \dot{A}]$ avec $\bar{\partial}U_o - [U_o, \Gamma_o] = 0$,

$$\bar{\partial}\dot{U} - [\dot{U}, \Gamma_o] - [U_o, \dot{\Gamma}] = [U_o, \bar{\partial}\dot{A} + [\dot{A}, \Gamma_o] - \dot{\Gamma}].$$

Il reste donc à démontrer que, pour tous $\dot{A}_1, \dot{A}_2 \in \mathfrak{g}(\mathcal{A}^0(X))$ et tous $\dot{\Omega}_1, \dot{\Omega}_2 \in \mathfrak{g}(\mathcal{A}^{0,1}(X))$ avec $[U_o, \dot{\Omega}_1] = [U_o, \dot{\Omega}_2] = 0$, on a

$$\int_X \langle [U_o, \dot{A}_1], \dot{\Omega}_2 - \bar{\partial}\dot{A}_2 - [\dot{A}_2, \Gamma_o] \rangle \\ - \langle [U_o, \dot{A}_2], \dot{\Omega}_1 - \bar{\partial}\dot{A}_1 - [\dot{A}_1, \Gamma_o] \rangle = 0.$$

Pour démontrer cette dernière égalité, on remarque premièrement que

$$\int_X \langle [U_o, \dot{A}_1], \dot{\Omega}_2 \rangle = \int_X \langle [U_o, \dot{A}_2], \dot{\Omega}_1 \rangle = 0$$

car $[U_o, \dot{\Omega}_1] = [U_o, \dot{\Omega}_2] = 0$. Puis, on remarque que, par intégration par parties,

$$\int_X \langle [U_o, \dot{A}_1], \bar{\partial}\dot{A}_2 \rangle = \int_X \langle \bar{\partial}[U_o, \dot{A}_1], \dot{A}_2 \rangle \\ = \int_X \langle [U_o, \dot{A}_2], \bar{\partial}\dot{A}_1 \rangle + \int_X \langle [[U_o, \Gamma_o], \dot{A}_1], \dot{A}_2 \rangle$$

puisque $\bar{\partial}U_o - [U_o, \Gamma_o] = 0$. Il reste donc à vérifier que

$$-\langle [U_o, \dot{A}_1], [\dot{A}_2, \Gamma_o] \rangle + \langle [U_o, \dot{A}_2], [\dot{A}_1, \Gamma_o] \rangle - \langle [[U_o, \Gamma_o], \dot{A}_1], \dot{A}_2 \rangle = 0$$

ce qui résulte aussitôt de l'identité de Jacobi. $\square$

Appendices.

A. Compléments de géométrie symplectique. Soit T un schéma lisse sur $\mathbb{C}$, muni d'une structure symplectique, i.e. d'une 2-forme globale ω_T non dégénérée et fermée.

Définition (A.1). Un sous-schéma localement fermé V de T est dit strictement isotrope si la restriction de ω_T à V est identiquement nulle; il est dit strictement lagrangien s'il est strictement isotrope et si en tout point v de V la dimension de V en v est égale à la moitié de la dimension de T en v .

Un sous-schéma localement fermé V de T est dit isotrope (resp. lagrangien) s'il existe un ouvert dense de V qui est strictement isotrope (resp. strictement lagrangien) dans T .

Remarques (A.2). (i) Pour tout point t de T , la dimension de T en t est paire puisque T est symplectique; si V est un sous-schéma fermé isotrope de T , pour tout point v de V , on a nécessairement

$$\dim_v(V) \leq \frac{1}{2} \dim_v(T).$$

(ii) Si V est un sous-schéma localement fermé de T qui est lisse sur $\mathbb{C}$, alors V est strictement isotrope (resp. strictement lagrangien) si et seulement si V est isotrope (resp. lagrangien): Ω_V^1 est localement libre et toute section de Ω_V^1 qui s'annule sur un ouvert dense de V est identiquement nulle.

PROPOSITION (A.3). Soit V un sous-schéma localement fermé de T . Alors, si V est strictement lagrangien, V est lisse sur $\mathbb{C}$.

Preuve. Pour tout point complexe v de V , on a la surjection canonique

$$i_{(v)}^*: \Omega_{T(v)}^1 \rightarrow \Omega_{V(v)}^1$$

$(V \xrightarrow{i} T)$. De plus, on a d'une part

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{V(v)}^1) \geq \frac{1}{2} \dim_v(T)$$

et d'autre part

$$(\Lambda^2 i_{(v)}^*)(\omega_{T(v)}) = 0,$$

puisque V est strictement lagrangien dans T . Par suite, on a

$$\dim_{\mathbb{C}}(\Omega_{V(v)}^1) = \frac{1}{2} \dim_v(T)$$

pour tout point complexe v de V . D'où la conclusion d'après [EGA], (IV, 17.15.5). $\square$

A tout schéma S lisse sur $\mathbb{C}$ est attaché canoniquement un schéma lisse sur $\mathbb{C}$, muni d'une structure symplectique, à savoir T^*S , le fibré cotangent à S . On notera simplement ω_S la 2-forme canonique sur T^*S ; on a

$$\omega_S = -d\theta_S$$

où θ_S est l'unique 1-forme globale sur T^*S telle que, pour toute section locale α de Ω_S^1 , on ait

$$\alpha^*\theta_S = \alpha$$

avec α la section locale de la projection canonique $\tau: T^*S \rightarrow S$ définie par α ($T^*S = V((\Omega_S^1)^*)$, où $(\Omega_S^1)^* = \underline{\text{Hom}}(\Omega_S^1, \mathcal{O}_S)$).

Si S' est un autre schéma lisse sur $\mathbb{C}$ et si $f: S' \rightarrow S$ est un morphisme de schémas sur $\mathbb{C}$, on a le diagramme de l'application cotangente

$$(A.4) \quad \begin{array}{ccc} T^*S \times_S S' & \xrightarrow{F} & T^*S' \\ \downarrow \tilde{f} & & \\ T^*S & & \end{array}$$

où $\tilde{f}$ est la projection canonique et F la différentielle de f . On vérifie facilement que $F^*\theta_{S'} = \tilde{f}^*\theta_S$ et donc que

$$(A.5) \quad F^*\omega_{S'} = \tilde{f}^*\omega_S.$$

PROPOSITION (A.6). *Soient $V \subset T^*S$ et $V' \subset T^*S'$ des sous-schémas localement fermés; on pose $W = F^{-1}(V')$. On suppose que V' est strictement isotrope et qu'il existe un ouvert W^o de W tel que $\tilde{f}(W^o) = V$ et que $\tilde{f}: W^o \rightarrow V$ soit lisse. Alors V est aussi strictement isotrope.*

Preuve. On a $\omega_S|_{V'} \equiv 0$ par hypothèse et donc

$$(\tilde{f}^*\omega_S)|_{W^o} = (F^*\omega_{S'})|_{W^o} \equiv 0.$$

Or, pour tout point $v \in V$, il existe $w \in W^o$ tel que $\tilde{f}(w) = v$ et que

$$\tilde{f}_w^*: \Omega_{V,v}^1 \rightarrow \Omega_{W^o,w}^1$$

soit injective, d'où la conclusion. $\square$

Si R est un sous-schéma fermé intègre de S , on note simplement T_R^*S (et on appelle encore fibré conormal à R dans S) l'adhérence dans T^*S du fibré conormal à R^o dans S , où R^o est un ouvert dense de R qui est lisse sur $\mathbb{C}$ ($T_R^*S = V((\text{Ker}(\Omega_{S|R^o}^1 \rightarrow \Omega_{R^o}^1))^*)$). T_R^*S est un fermé intègre de T^*S qui est lagrangien (il est bien connu et facile de voir que T_R^*S est strictement lagrangien).

De plus, T_R^*S est conique (stable par l'action naturelle de $GL_{1,\mathbb{C}}$ sur T^*S). Réciproquement, on a le résultat bien connu suivant:

PROPOSITION (A.7). *Soit $V \subset T^*S$ un fermé intègre conique lagrangien. Alors, $\tau(V) = R$ est un fermé intègre de S ($\tau: T^*S \rightarrow S$ est la projection canonique) et $V = T_R^*S$.*

Preuve. Il est clair que $\tau(V) = R$ est un fermé intègre de S puisque V est intègre et conique. Soit alors R° un ouvert dense de R qui est lisse sur $\mathbb{C}$ et V° un ouvert dense de $V \cap \tau^{-1}(R^\circ)$ qui est lisse sur R° et donc strictement lagrangien. Il suffit de montrer que $V^\circ \subset T_R^*S$ puisque V° et T_R^*S ont la même dimension. Pour cela, fixons un point complexe v de V° d'image r dans R° . On a

$$T_v V \xrightarrow{\sim} T_v^*(T^*S)_v,$$

via l'isomorphisme

$$T_v(T^*S) \xrightarrow{\sim} T_v^*(T^*S)$$

donné par la structure symplectique, puisque V° est strictement lagrangien. Or, comme V est conique, le champ d'Euler en v est contenu dans $T_v V$ (le champ d'Euler est la générateur infinitésimal de l'action de $GL_{1,\mathbb{C}}$ sur T^*S) et par suite la valeur en v de θ_S est dans $T_v^*(T^*S)_v$ (l'isomorphisme $\mathcal{T}_{T^*S} \xrightarrow{\sim} \Omega_{T^*S}^1$ donné par la structure symplectique envoie le champ d'Euler sur θ_S). On en déduit aussitôt que $v \in (T_R^*S)_r$, d'où la conclusion. $\square$

Remplaçons maintenant les schémas lisses sur $\mathbb{C}$ par des champs algébriques et lisses sur $\mathbb{C}$. Les définitions et résultats ci-dessus se généralisent immédiatement dans ce nouveau cadre grâce aux remarques suivantes.

Soit $\mathcal{S}$ un champ algébrique et lisse sur $\mathbb{C}$. On peut recouvrir $\mathcal{S}$ par un schéma S , automatiquement lisse sur $\mathbb{C}$, i.e. on peut trouver un schéma S sur $\mathbb{C}$ et un morphisme de champs

$$\varphi: S \rightarrow \mathcal{S}$$

représentable, lisse et surjectif. Alors, si $L_{\mathcal{S}/\mathbb{C}}$ est le complexe cotangent de $\mathcal{S}$ sur $\mathbb{C}$, on a un isomorphisme canonique

$$(A.8) \quad \varphi^* L_{\mathcal{S}/\mathbb{C}} \simeq [\Omega_{S/\mathbb{C}}^1 \rightarrow \Omega_{S/\mathcal{S}}^1]$$

dans $D_{\text{coh}}^b(\mathcal{O}_S)$, où $\Omega_{S/\mathbb{C}}^1$ et $\Omega_{S/\mathcal{S}}^1$ sont deux $\mathcal{O}_S$ -modules cohérents localement libres placés en degrés 0 et 1, respectivement. On a aussi le diagramme de l'application cotangente de φ

$$(A.9) \quad \begin{array}{ccc} T^* \mathcal{S} \times_{\mathcal{S}} S & \xrightarrow{\Phi} & T^* S \\ \bar{\varphi} \downarrow & & \\ T^* \mathcal{S} & & \end{array}$$

où Φ est l'immersion fermée correspondant à l'inclusion

$$\mathcal{H}^0(\varphi^* L_{\mathcal{S}/\mathbb{C}}) \rightarrow \Omega_{\mathcal{S}/\mathbb{C}}^1$$

induite par (A.8).

Définition (A.9). Un sous-champ algébrique localement fermé $\mathcal{V}$ de $T^*\mathcal{S}$ est dit strictement isotrope (resp. isotrope, strictement lagrangien, lagrangien) si, pour un (et donc pour tout) recouvrement $\varphi: S \rightarrow \mathcal{S}$ comme ci-dessus, le sous-schéma localement fermé

$$V = \Phi(\bar{\varphi}^{-1}(\mathcal{V}))$$

de T^*S l'est.

En particulier, si $\mathcal{S}$ est purement de dimension $d_{\mathcal{S}}$ et si $\mathcal{V} \subset T^*\mathcal{S}$ est lagrangien (resp. strictement lagrangien), $\mathcal{V}$ est purement de dimension $d_{\mathcal{S}}$ (resp. lisse sur $\mathbb{C}$, purement de dimension $d_{\mathcal{S}}$, d'après (A.3)). De plus, (A.6) et (A.7) s'étendent aux champs algébriques.

Preuve de (3.3). C'est une conséquence directe de (A.6) et des remarques qui précèdent. $\square$

B. Une première preuve du théorème (0.1) dans le cas particulier $G = GL_{n,\mathbb{C}}$. Pour chaque partition ν de n ($\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_1 \geq \dots \geq \nu_m > 0$ et $\nu_1 + \dots + \nu_m = n$), on note P_{ν} le sous-groupe parabolique standard de G de Levi $GL_{\nu_1,\mathbb{C}} \times_{\mathbb{C}} \dots \times_{\mathbb{C}} GL_{\nu_m,\mathbb{C}}$ plongé diagonalement dans G et on note $\mathcal{P}_{\nu} = G/P_{\nu}$ le schéma connexe, projectif et lisse sur $\mathbb{C}$ des sous-groupes paraboliques de G conjugués à P_{ν} .

Pour chaque ν , on note $\mathcal{O}_{\nu}^*$ l'orbite nilpotente de Richardson associée à P_{ν} : $\bigcup_{P \in \mathcal{P}_{\nu}} \mathfrak{p}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$ est un fermé irréductible formé d'éléments nilpotents et contient une et une seule orbite nilpotente de G comme ouvert dense, c'est $\mathcal{O}_{\nu}^*$; pour toute orbite nilpotente $\mathcal{O}^*$ de G , il existe une et une seule partition ν de n telle que $\mathcal{O}^* = \mathcal{O}_{\nu}^*$ (on a noté ci-dessus $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{g}$ la sous-algèbre de Lie de P et $\mathfrak{p}^{\perp} \subset \mathfrak{g}^*$ son orthogonal).

Pour chaque ν , l'ensemble

$$\Lambda_{\nu} = \{(g, \xi^*) | g \in Z_G(\xi^*) \text{ et } \xi^* \in \mathcal{O}_{\nu}^*\}$$

est le support d'un sous-schéma localement fermé de T^*G , intègre et lisse sur $\mathbb{C}$ purement de dimension n^2 , noté encore Λ_{ν} , et la projection canonique

$$\Lambda_{\nu} \rightarrow \mathcal{O}_{\nu}^*$$

est lisse, de fibre en ξ^* le groupe algébrique connexe $Z_G(\xi^*)$. La réunion disjointe

$$\Lambda_G = \bigcup_{\nu} \Lambda_{\nu}$$

est un sous-schéma fermé réduit de T^*G . Les Λ_ν et donc Λ_G sont clairement coniques.

Le théorème (0.1) pour $G = GL_{n,\mathbb{C}}$ est précisé par l'énoncé suivant:

THÉORÈME (B.1). *Pour toute partition ν de n , le sous-schéma localement fermé Λ_ν de T^*G est strictement lagrangien.*

Preuve. Fixons une partition ν de n et considérons le "schéma d'incidence"

$$\pi_\nu: \tilde{G}_\nu \rightarrow G$$

où

$$\tilde{G}_\nu = \{(g, P) \in G \times_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_\nu \mid g \in P\}.$$

Comme $\tilde{G}_\nu$ est fibré sur $\mathcal{P}_\nu$ de fibre P en P , $\tilde{G}_\nu$ est un schéma connexe, quasi-projectif sur $\mathbb{C}$, de dimension égale à celle de G , i.e. n^2 . Considérons le diagramme de l'application cotangente de π_ν .

$$\begin{array}{ccc} T^*G \times_G \tilde{G}_\nu & \xrightarrow{\Pi_\nu} & T^*\tilde{G}_\nu \\ \bar{\pi}_\nu \downarrow & & \\ T^*G & & \end{array}$$

et posons

$$\Sigma_\nu = \Pi_\nu^{-1}(T_{\tilde{G}_\nu}^*\tilde{G}_\nu).$$

L'étude différentielle de la projection $\tilde{G}_\nu \rightarrow \mathcal{P}_\nu$ montre aussitôt que, pour tout point complexe (g, P) de $\tilde{G}_\nu$, la fibre de Π_ν en (g, P) s'identifie canoniquement à l'application $\mathbb{C}$ -linéaire

$$\mathfrak{g}^* \rightarrow (\mathfrak{g}^* \times \mathfrak{p}^\perp) / \{(\nu^*, \text{Ad}^*(g)(\nu^*) - \nu^*) \mid \nu^* \in \mathfrak{p}^\perp\}$$

$$\xi^* \rightarrow \text{classe de } (\xi^*, 0).$$

Par suite

$$\Sigma_\nu = \{(g, P, \xi^*) \in \tilde{G}_\nu \times_{\mathbb{C}} \mathcal{G}^* \mid g \in Z_G(\xi^*) \text{ et } \xi^* \in \mathfrak{p}^\perp\}.$$

Maintenant, comme $\mathcal{O}_{\nu^*}^*$ est un ouvert dense de $\bigcup_{P \in \mathcal{P}_\nu} \mathfrak{p}^\perp$,

$$\Sigma_\nu^0 = \{(g, P, \xi^*) \in \Sigma_\nu \mid \xi^* \in \mathcal{O}_{\nu^*}^*\}$$

est un ouvert dense de Σ_ν et on vérifie facilement que $\bar{\pi}_\nu$ induit un isomorphisme de Σ_ν^0 sur Λ_ν . On peut appliquer (A.6), d'où la conclusion. $\square$

Remarque (B.2). Pour toute partition ν de n , notons $\bar{\nu} = (\bar{\nu}_1, \dots, \bar{\nu}_m)$ la partition duale ($\bar{m} = \nu_1$ et pour $j = 1, \dots, \bar{m}$, on a

$$\bar{\nu}_j = \# \{ i = 1, \dots, m \mid \nu_i \geq j \}.$$

Alors, $\mathcal{O}_{\nu}^*$ est l'orbite de la matrice nilpotente

$$\text{diag}(J_{\bar{\nu}_1}(0), \dots, J_{\bar{\nu}_m}(0))$$

où, pour tout entier $\bar{\nu} \geq 1$ et tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $J_{\bar{\nu}}(\alpha)$ est le bloc de Jordan de taille $\bar{\nu} \times \bar{\nu}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & & & 1 & & \\ & \ddots & & & \ddots & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \alpha & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \alpha \end{bmatrix}$$

(on a identifié $\mathfrak{g}^*$ à $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_{n, \mathbb{C}}$ de la façon usuelle). Considérons maintenant le sous-ensemble

$$G_{\nu} = \bigcup_{\substack{g \in G \\ \alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}^\times \\ \alpha_i \neq \alpha_j}} g \cdot \text{diag}(J_{\bar{\nu}_1}(\alpha_1), \dots, J_{\bar{\nu}_m}(\alpha_m)) \cdot g^{-1}$$

de G . Il est facile de voir que G_{ν} est le support d'un sous-schéma localement fermé de G , intègre et lisse sur $\mathbb{C}$, noté encore G_{ν} (G_{ν} est une "nappe de Dixmier"). Alors, $T_{G_{\nu}}^* G$ rencontre Λ_{ν} suivant un ouvert dense et donc Λ_{ν} est un ouvert dense de $T_{G_{\nu}}^* G$.

Les démonstrations de (3.1) et de (B.1) sont très similaires. C'est encore plus frappant si l'on introduit le champ algébrique et lisse sur $\mathbb{C}$, connexe et de dimension 0, $\mathcal{G}_G$, des classes de conjugaison dans G ; $\mathcal{G}_G$ est le quotient de G par l'action de G sur lui-même par conjugaison et le morphisme quotient $\varphi: G \rightarrow \mathcal{G}_G$ est un recouvrement. On a alors

$$T^* \mathcal{G}_G \times_{\mathcal{G}_G} G \xrightarrow{\Phi} T^* G$$

qui s'identifie au sous-schéma fermé réduit de support

$$\{(g, \xi^*) \mid g \in Z_G(\xi^*)\} \subset G \times_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}^* = T^* G.$$

Par suite, Λ_G définit encore un sous-champ algébrique fermé, réduit, conique et lagrangien de $T^* \mathcal{G}_G$, noté encore Λ_G .

C. Preuve du théorème (0.1) pour G arbitraire. Si l'on identifie TG à $G \times \mathfrak{g}$ $= \{(g, \xi^*)\}$ et T^*G à $G \times \mathfrak{g}^* = \{(g, \xi)\}$ par translation à gauche, on a une identification correspondante

$$T(T^*G) = G \times \mathfrak{g}^* \times \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^* = \{(g, \xi^*, \xi, \xi^*)\}$$

et la 2-forme symplectique canonique ω de T^*G est donnée par

$$\begin{aligned} \omega_{(g, \xi^*)}((\xi_1, \dot{\xi}_1^*), (\xi_2, \dot{\xi}_2^*)) \\ = \dot{\xi}_1^*(g\xi_2g^{-1}) - \dot{\xi}_2^*(g\xi_1g^{-1}) + \xi^*(g[\xi_1, \xi_2]g^{-1}) \end{aligned}$$

pour tous $(\xi_1, \dot{\xi}_1^*), (\xi_2, \dot{\xi}_2^*) \in T_{(g, \xi^*)}(T^*G)$ et tout $(g, \xi^*) \in T^*G$.

Fixons une orbite coadjointe $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*$. Alors

$$\{(g, \xi^*) | g \in Z_G(\xi^*) \text{ et } \xi^* \in \mathcal{O}^*\}$$

est une sous-variété localement fermée de T^*G , purement de dimension égale à celle de G , et l'espace tangent au point (g_o, ξ_o^*) de cette sous-variété s'identifie canoniquement au sous-espace

$$\{(\xi, \dot{\xi}^*) | \exists \nu \in \mathfrak{g} \text{ avec } \dot{\xi}^* = [\nu, \xi_o^*] \text{ et } \xi + \nu - g_o^{-1}\nu g_o \in Z_{\mathfrak{g}}(\xi_o^*)\}$$

de $T_{(g_o, \xi_o^*)}(T^*G)$.

Le théorème (0.1) est trivialement conséquence de la proposition suivante:

PROPOSITION (C.1). *La 2-forme symplectique canonique ω de T^*G s'annule identiquement sur*

$$\{(g, \xi^*) | g \in Z_G(\xi^*) \text{ et } \xi^* \in \mathcal{O}^*\}$$

pour toute orbite coadjoint $\mathcal{O}^* \subset \mathfrak{g}^*$.

Preuve de (C.1). Il s'agit de voir que pour tous $\nu_1, \nu_2 \in \mathfrak{g}$ et $\mu_1, \mu_2 \in Z_{\mathfrak{g}}(\xi_o^*)$, on a

$$\begin{aligned} [\nu_1, \xi_o^*](\nu_2 - g_o\nu_2g_o^{-1} + \mu_2) - [\nu_2, \xi_o^*](\nu_1 - g_o\nu_1g_o^{-1} + \mu_1) \\ + \xi_o^*([\nu_1 - g_o\nu_1g_o^{-1} + \mu_1, \nu_2 - g_o\nu_2g_o^{-1} + \mu_2]) = 0. \end{aligned}$$

Or, on a

$$[\nu, \xi_o^*](\mu) = 0$$

et

$$\xi_o^*([\nu, \mu]) = \xi_o^*([\mu, \nu]) = 0$$

si $\nu \in \mathfrak{g}$ et $\mu \in Z_G(\xi_o^*)$. Par suite, on est ramené à montrer que

$$\begin{aligned} & [\nu_1, \xi_o^*](\nu_2 - g_o \nu_2 g_o^{-1}) - [\nu_2, \xi_o^*](\nu_1 - g_o \nu_1 g_o^{-1}) \\ & + \xi_o^*([\nu_1 - g_o \nu_1 g_o^{-1}, \nu_2 - g_o \nu_2 g_o^{-1}]) = 0, \end{aligned}$$

i.e. que

$$\begin{aligned} & \xi_o^*([\nu_2 - g_o \nu_2 g_o^{-1}, \nu_1] - [\nu_1 - g_o \nu_1 g_o^{-1}, \nu_2] \\ & + [\nu_1 - g_o \nu_1 g_o^{-1}, \nu_2 - g_o \nu_2 g_o^{-1}]) = 0, \end{aligned}$$

ou encore que

$$\xi_o^*(g_o[\nu_1, \nu_2]g_o^{-1} - [\nu_1, \nu_2]) = 0.$$

Mais cette dernière égalité résulte aussitôt de la relation $g_o \in Z_G(\xi_o^*)$. □

Cette démonstration de (0.1) et la démonstration de (0.3) que nous avons esquissée au numéro 4 sont de même nature (voir le dernier paragraphe de l'appendice B).

RÉFÉRENCES

- [A-B] M. F. ATIYAH ET R. BOTT, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London A **308** (1982), 523–615.
- [Ar] M. ARTIN, *Versal deformations and algebraic stacks*, Invent. Math. **27** (1974), 165–189.
- [Dr] V. G. DRINFELD, Lettre à P. Deligne du 22 juin 1981.
- [EGA] A. GROTHENDIECK ET J. DIEUDONNE, *Eléments de Géométrie Algébrique I et IV*, troisième et quatrième parties, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971, et Publ. Math. de l'IHES **28** et **32**, 1966 et 1967.
- [Gr] A. GROTHENDIECK, *Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algébrique IV: Les schémas de Hilbert*, Séminaire Bourbaki **221**, 1960–1961.
- [Ha-Na] G. HARDER ET M. S. NARASIMHAN, *On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves*, Math. Ann. **212** (1975), 215–248.
- [Hi] N. HITCHIN, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54** (1987), 91–114.
- [Il] L. ILLUSIE, *Complexe Cotangent et Déformations I*, Lecture Notes in Math. **239**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1971.
- [La] G. LAUMON, *Correspondance de Langlands géométrique pour les corps de fonctions*, Duke Math. J. **54** (1987), 309–359.
- [Mu] D. MUMFORD, *Lectures on Curves on an Algebraic Surface*, Ann. of Math. Stud. **59**, Princeton, NJ, 1966.
- [Sh] S. S. SHATZ, *The decomposition and specialization of algebraic families of vector bundles*, Compositio Math. **35** (1977), 163–187.
- [Sp-St] T. SPRINGER ET R. STEINBERG, “Conjugacy classes,” in Lecture Notes in Math. **131**, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1970, pp. 167–266.

MATHÉMATIQUE, BÂTIMENT 425, UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD, 91405 ORSAY CEDEX, FRANCE